ТЕОРЕТИЧНА ФИЗИКА И ФИЗИКА НА ВИСОКИТЕ ЕНЕРГИИ В ЧЕСТ НА АКАДЕМИК ХРИСТО Я. ХРИСТОВ

София , БАН , 1988

КАЛИБРОВЪЧНИ ТЕОРИИ С ФЕРМИОНИ В ТРИМЕРНО ПРОСТРАНСТВО — ВРЕМЕ

Е. Р. Нисимов, С. Й. Пачева

Институт за ядрени изследвания и ядрена енергетика, София

Централно място в съвременната физика на елементарните частици и високите енергии заема идеята за велико (и свръхвелико) обединение на фундаменталните взаимодействия: електромагнитни, ядрени — силни и слаби — и гравитационни [1]. Основната цел на идеята е с минимален брой независими параметри да се описва цялото многообразие от физични закони и свойства в микросвета — маса, товар и структура на частиците, ефективни константи на връзка, симетрия на взаимодействията и нейното нарушение. Построяването на всеки квантовополеви модел на велико обединение се основава на няколко ръководни принципа.

1. Калибровъчна инвариантност — принцип на относителност за вътрешните симетрии (изоспинови, „цветни" и др.), като при това калибровъчните полета посмат ролята на преносители на фундаменталните взаимодействия.

2. Зависимост на структурата (в частност симетрията) и силата на взаимодействията от мащабите на енергията (на разстоянията).

3. Нетривиална и изменяща се структура на физичния вакуум, т. е. на състоянието с най-ниска енергия на квантовополевите системи. Всяка такава структура съответствува на определена фаза на системата, подобно на фазите във физиката на кондензираните среди.

Съществуват няколко основни механизма, които в съответствие с изброените принципи се считат присъщи на всяка реалистична теория на великото обединение.

а. Динамично (в резултат на квантови ефекти) спонтанно нарушение на симетриите. Първоначалната голяма проста група на симетрия на великото обединение при енергетичен мащаб $\Lambda \geq 10^{15}$ GeV (или $\Lambda \geq 10^{19}$ GeV за свръхвеликото обединение) трябва да се сведе чрез последователни спонтанни нарушения, настъпващи при все по намаляващи мащаби Λ_i до наблюдаваната при мащаб $\Lambda_0 \lesssim 100$ GeV група на симетрия $SU(3)$ („цветна")$\times U(1)$ (електромагнитна).

б. Фазови преходи — изменя се структурата на физичния вакуум вследствие спонтанното нарушение на симетриите, съответно скейлингово поведение на Гриновите функции на системата, в критичната област около фазовия преход [2].

в. Механизми, водещи до формиране на спектъра на частиците. Динамично се генерират маси и свързани състояния, „удържат" се частици [3] (напр. „цветни" обекти в територията на силните взаимодействия), екранират се товари, образуват се кохерентни възбуждания на основните квантови полета — солитони (магнитни монополи, вихри, струни и т. н.) [4–6].

Реалистичните модели в четиримерната ($D=4$) квантова теория на полето (размерността на пространство–времето ще отбелязваме с D) не се поддават на точно решение. Стандартен метод за систематични приблизителни пресмятания е „наивната" теория на пертурбациите по константите на връзка. Този метод разглежда всички частици (кванти на съответни полета $\Phi(x)$) в нулевото (главно) приближение като свободни, а взаимодействията между тях описва като пертурбации около свободната теория. Съответните лагранжиани се записват във вида

$$L(x) = -\frac{1}{2}\Phi^*(x)K(\partial_x)\Phi + \sum g_i L_i(x), \tag{1.1}$$

където $\Phi(x)$ е общата съвкупност от полета с различни спинове и вътрешни степени на свобода; $K(\partial_x)$ — диференциален оператор (от първи или втори ред); g_i — константи на връзка; L_i — съдържат членове от степени по Φ, по-висока от 2, описващи различните типове взаимодействия. Изискването за пренормируемост [7, 8] на (1.1), т. е. последователното отстраняване на ултравиолетовите разходимости при квантуването на (1.1), налага много силни ограничения върху вида но взаимодействията $L_i(x)$: g_i трябва да бъдат или безразмерни, или да имат размерност на маса в положителна степен[1]. Зависимостта на пренормираните константи на връзка от енергетичния мащаб Λ — $g_i^{\text{ren}} = g_i^{\text{ren}}(\Lambda)$ в някои случаи е друг съществен недостатък на „наивната" теория на пертурбациите. Така например пренормираният електричен товар $e^{\text{ren}}(\Lambda)$ нараства неограничено с нарастването на Λ [7] в разглежданията в квантовата електродинамика, поради което тя престава да бъде теория с физичен смисъл в рамките на теорията на пертурбациите при високи енергии. Освен това „наивната" теория на пертурбациите очевидно не е в състояние да описва свойства на системите при големи g_i (да напомним, че например масите на солитоните са от порядък $1/g_i$ [4, 5, 6].

Необходимостта от непертурбативни методи (по-точно от методи за систематични последователни приближения, отлични от теорията на пертурбациите по константите на връзка) за описание на основните механизми и свойства (вж. а—в) е довела до разработването и успешното прилагане на редица мощни подходи: квазикласическо разлагане, разлагане около средното поле [10], $1/N$-разлагане [11, 12] (N е броят на „цветовете" или „ароматите" на частиците), непертурбативни и числени (Монте-Карло [13] методи за теории върху пространствено—времении решетки [14]) и др.

Целта на настоящата статия е с помощта на $1/N$-разлагането и на примера на един важен клас от калибровъчни теории с фермиони при $D=3$ да се демонстрира систематично една конкретна реализация на фундаменталните механизми (вж. а—в).

Нека отбележим, че квантовополевите системи при $D=3$ не са само теоретичен модел за непертурбативни свойства и явления, в който непертурбативните методи могат да се прилагат по-просто и по-систематично, отколкото при $D=4$. Моделите при $D=3$ имат непосредствено значение за реалните физични системи, което се свежда главно до: описание на критичното поведение на реални класически полеви системи [2, 15]; описание

---

[1] Навсякъде тук се използува естествената система от единици $c=\hbar=k_B=1$ съответно за скоростта на светлината, константата на Планк и константата на Болцман.

на поведението при ниски енергии (големи разстояния) на реални квантово-полеви системи при висока температура [16].

Нека подчертаем и основните достойнства на $1/N$-разлагането [11, 12]— $1/N$ е безразмерен параметър, който не зависи от пренормировките и енергетичните мащаби. В частност теории, които са непренормируеми в „наивната“ теория на пертурбациите, се оказват пренормируеми по $1/N$. Всеки отделен порядък на $1/N$-разлагането запазва явно всички симетрии на теорията. Освен това $1/N$ може да се окаже действително малък параметър на разлагане. Такъв е случаят например в квантовата теория на гравитационното поле, взаимодействуващо с полета на материята [17, 18], където N е броят на полетата с маси, по малки от $m_{\text{Planck}} \approx 10^{19}$.

Следващите разглеждания са разгърнато изложение с някои допълнения на резултати, отразени в [19—22]. Поради ограничения обем на статията навсякъде са цитирани предимно статии с обзорен характер или монографии, в които могат да се намерят по-подробни цитати от съответните оригинални изследвания.

2. ФОРМУЛИРОВКА НА МОДЕЛИТЕ

Ще разгледаме класа калибровъчни нелинейни сигми-модели с фермиони (КНЛСМ+Ф) при $D=3$, притежаващи вътрешна симетрия $(n<N)$:

$$\text{(2.1)} \qquad U(N)\ (\text{„ароматна“}) \times U(n)\ (\text{„цветна“ калибровъчна}).$$

Аналогично могат да бъдат разгледани и случаите с $O(N)\times O(n)$ и $Sp(N) \times Sp(n)$. Съответният лагранжиан има вида

$$\text{(2.2)} \quad L_{\text{КНЛСМ}+\Phi} = |\nabla_\nu \varphi|^2 + i\bar{\psi}\nabla^{(\varepsilon)}\psi + \frac{\lambda_0}{4Nn\mu}(\bar{\psi}\psi)^2 + \frac{\lambda_1}{4Nn\mu}(\bar{\psi}\tau_A\psi)^2 + NnL_{A,W},$$

$$\text{(2.2а)} \quad \varphi^*\varphi - Nn\mu/T = 0,\ \varphi^*\tau_A\varphi = 0,\ \bar{\psi}\varphi = \varphi^*\psi = \bar{\psi}\tau_A\varphi = \varphi^*\tau_A\psi = 0,$$

$$\text{(2.2б)} \quad L_{A,W} = -(4e_0^2\mu)^{-1}F^2_{\varkappa\lambda}(A) - (4e_1^2 n\mu)^{-1}\,\mathrm{tr}\,(\underset{\sim}{G}^2_{\varkappa\lambda}(W))$$

$$-B_0\partial_\nu A^\nu - \frac{1}{n}\mathrm{tr}\,(\underset{\sim}{B}\,\partial_\nu \underset{\sim}{W}^\nu) + (Nn)^{-1}\,\mathrm{tr}\,(\chi^*\partial_\nu\nabla_\nu\chi),$$

като са въведени следните означения:

$$F_{\varkappa\lambda}(A) = \partial_\varkappa A_\lambda - \partial_\lambda A_\varkappa,\ \underset{\sim}{G}_{\varkappa\lambda}(W) = \partial_\varkappa \underset{\sim}{W}_\lambda - \partial_\lambda W_\varkappa + i\,[W_\varkappa,\ \underset{\sim}{W}_\lambda],$$

$$(\nabla_\nu\varphi)^k_a = \partial_\nu\varphi^k_a + iA_\nu\varphi^k_a + i\,W^{kl}_\nu\varphi^l_a,\ (\nabla^{(\varepsilon)}_\nu\psi)^k_a = \partial_\nu\psi^k_a + i\varepsilon_0 A_\nu\psi^k_a + i\varepsilon_1 \underset{\sim}{W}^{kl}_a\psi^l_a,$$

$$\nabla_\nu\underset{\sim}{\chi} = \partial_\nu\underset{\sim}{\chi} + i\,[\underset{\sim}{W}_\nu,\ \underset{\sim}{\chi}];$$

$$\not{O} \equiv O^\nu\gamma_\nu,\ \bar{O} \equiv O^*\gamma_0,\ \{\gamma_\mu,\ \gamma_\nu\} = 2\,\eta_{\mu\nu} = 2\,\mathrm{diag}\,(+,\ -,\ -),$$

$$\underset{\sim}{O}^{kl} = O_A\tau^{kl}_A,\ \mathrm{tr}\,(\tau_A\tau_B) = n\delta_{AB},\ \{\tau_A,\ \tau_B\} = 2(\delta_{AB} + \alpha_{ABC}\tau_C),$$

$$a = 1,\dots,N;\ k, l = 1,\dots,n;\ A, B = 1,\dots,n^2-1,$$

$$\varphi^*\varphi \equiv \varphi^{*k}_a\varphi^k_a,\ \bar{\psi}\varphi \equiv \bar{\psi}^k_a\varphi^k_a \text{ и т. н.}$$

В (2.2) μ е общ мащаб с размерност на маса, с помощта на който всички константи на връзка са дефинирани като безразмерни. Скаларните и спинорните полета φ^k_a и ψ^k_a се трансформират по основното представяне на

$U(N)\times U(n)$; $\varepsilon_{0,1}$ са съответно товарите $U(1)$ и $SU(n)$ на ψ_a^k в единици на съответните товари $e_{0,1}$ на φ_a^k. Спомагателните полета B_0 и B са множители на Лагранж, задаващи калибровъчното условие на Ландау за $U(1)$ и $SU(n)$-калибровъчните полета A_ν и W_ν; χ са съответните „призрачни" полета на Фадеев-Попов [16]; $\gamma_\nu(\nu=0,1,2)$ са матриците на Дирак при $D=3$. Ермитовите $n\times n$ матрици $\tau_A(A=1,\ldots, n^2-1)$ образуват ермитов базис на алгебрата на Ли на $SU(n)$. Сумиране по повтарящи се индекси ще се подразбира навсякъде, като в повечето случаи те ще бъдат пропускани за по голяма компактност. Параметърът T в (2.2) може да се интерпретира като температура на Гибсовия статистически ансамбъл на КНЛСМ+Ф, когато той се разглежда в евклидово пространство при $D=3$.

Действително при преминаване към евклидово пространство—време и при извършване на подходящо пренормиране на полетата $\varphi\to T^{-1/2}\varphi'$, $\psi\to T^{-1/2}\psi'$, $\chi\to T^{-1/2}\chi'$, $B_0\to T^{-1}B_0'$, $B\to T^{-1}B'$ и на константите на връзка $\lambda_{0,1}\to T\lambda'_{0,1}$, $e_{0,1}^2\to Te'^2_{0,1}$ континуалният интеграл [8, 23, 24] за статистическата сума на евклидовия модел (2.2) придобива вида

$$Z=\int \mathfrak{D}\varphi'\ldots\mathfrak{D}\chi'\prod_x \delta'(\varphi'^*\varphi'(x)-N\mu)\ldots\prod_x \delta(\varphi'^*\tau_A\psi'(x))\exp$$

$$\times\left\{-\frac{1}{T}\int d^3x\, L_{\text{КНЛСМ+Ф}}(\varphi',\ldots,\chi')\right\},$$

където $\delta(\ldots)$ са δ-функции на Дирак.

Нека отбележим, че „наивната" теория на пертурбациите е неприложима за (2.2), тъй като всички константи на връзка T/μ, λ_0/μ, λ_1/μ имат размерност $[\text{маса}]^{-1}$.

Важна роля при определяне структурата на фазите и спектъра на частиците при $D=3$ играят дискретните пространствено—временни симетрии: P — пространствено отражение, и T — обръщане на времето. Тяхното действие върху полетата се дефинира, както следва:

$$\varphi^{(P,T)}(x)=\eta_{P,T}\,\varphi(x_{P,T}),\quad \psi^{(P,T)}(x)=-i\eta_{P,T}\,\gamma_{1,2}\,\psi(x_{P,T}),$$

$$(A_\mu^{(P)})(x)=(A_0,\,-A_1,\,A_2)\,(x_P),\quad (A_\mu^{(T)})\,(x)=(A_0,\,-A_1,\,-A_2)\,(x_T), \tag{2.3}$$

$$x_P\equiv(x^0,\,-x^1,\,x^2),\quad x_T\equiv(-x^0,\,x^1,\,x^2),\quad |\eta_{P,T}|=1.$$

Оттук следва, че масовият член за фермионите $\bar\psi\psi$, а също така пренормируемите по „наивната" теория на пертурбациите (т. е. с безразмерни константи на връзка) $\psi-\varphi$ взаимодействия $(\bar\psi\psi)(\varphi^*\varphi)$, $(\bar\psi\varphi)(\varphi^*\psi)$ и т. н. изменят знака си при P- и T-отражения (2.3). В този смисъл при $D=3$ дискретните P- и T-симетрии играят роля, аналогична на киралните симетрии [25] при $D=4$, които обаче отговарят на непрекъснати групи. Да отбележим, че КНЛСМ+Ф (2.2) е P- и T-инвариантен на класическо ниво.

Особен интерес представляват суперсиметричните нелинейни сигма-модели при $D=3$ (за суперсиметрията вж. [26, 27]), които се получават от (2.2) при следния специален избор на константите на връзки: $e_{0,1}=\infty$, $\varepsilon_{0,1}=1$, $\lambda_{0,1}=T$.

В заключение ще прибавим следните забележки. Първата се отнася до геометричния смисъл на КНЛСМ+Ф в границата $e_{0,1}\to\infty$, $\varepsilon_{0,1}=1$. Тогава калибровъчните полета A_ν, W_ν се превръщат в съставни полета:

$$A_\nu=\frac{T}{2Nn\mu}\,[i\varphi^*\overleftrightarrow{\partial_\nu}\varphi+\bar\psi\gamma_\nu\psi],\quad W_{A\nu}=\frac{T}{2Nn\mu}\,[i\varphi^*\tau_A\overleftrightarrow{\partial_\nu}\varphi+\bar\psi\tau_A\gamma_\nu\psi]. \tag{2.4}$$

Съотношенията (2.4) заедно с (2.2а) водят до следната интерпретация [28]: φ_a^k могат да се разглеждат като координати, параметризиращи комплексно грасманово многообразие $G_{n,N}(\mathbf{C})$, а ψ_a^k — като координати, параметризиращи сечения в $T^*G_{N,n}(\mathbf{C})$ (кодопирателното разслоение над $G_{N,n}(\mathbf{C})$), приемащи стойности в Грасманова (антикомутираща) алгебра. Ролята на КНЛСМ+Ф при $D=2$ за имитиране на редица фундаментални свойства на реалните полеви системи при $D=4$ се обсъжда в [29, 30].

Втората забележка се отнася за съществения факт, че в случай на неабелева калибровъчна симетрия $\mathrm{U}(n)$ $(n>1)$ на (2.2) броят на „ароматите" N трябва да бъде четно число, за да се избегне непертурбативната аксилна аномалия при $D=3$ [31, 32], т. е, аномалното нарушение на калибровъчната инвариантност вследствие на нетривиалната топология на калибровъчната група.

3. 1/N-РАЗЛАГАНЕ

Стандартната процедура за извод на $1/N$-разлагането [15] в теории, съдържащи N-компонентни полета Φ_a $(a=1,\ldots, N)$ се състои в преобразуването на производящия функционал на Гриновите функции (средните по вакуума) [8.23] (j_Φ са източници за съответните полета Φ):

$$Z[j_\Phi]=\int \mathfrak{D}\,\Phi_a \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int d^D x\, L(\Phi)+i\int \Phi_a(x)\, j_\Phi^a(x)\, d^D x\right\} \tag{3.1}$$

с помощта на (спомагателни) полета $\mathscr{B}$, синглети относно съответната група $\mathrm{U}(N)$ (или аналогично $\mathrm{O}(N)$, $\mathrm{Sp}(N)$) или чийто брой компоненти не зависи от N в следната форма:

$$Z[j_\Phi]=\int \mathfrak{D}\mathscr{B} \exp\{iNS_1[\mathscr{B}]+iS_2[\mathscr{B};\ j_\Phi]\}. \tag{3.2}$$

От (3.2) е ясно, че $1/N$-разлагането на теорията, зададена с действието $S=\int d^D x\, L(\Phi)$ (от типа (1.1)), се свежда до „квазикласическо" разлагане на ефективната теория, зададена с действието $S_1[\mathscr{B}]$, където ролята на константата на Планк $\hbar$ (временно явно въведена в (3.1)) се поема от $1/N$.

Нека напомним [4—9], че квазикласическото разлагане на (3.1) се извършва по метода на стационарната фаза като разлагане около независещите от пространствено—временните координати стационарни точки $\widehat{\Phi}$ на $S=\int d^D x\, L(\Phi)$. При това

$$\langle \Phi(x)\rangle=\widehat{\Phi}+\mathrm{O}(\hbar),\ \ \delta S\,|\,\delta\Phi\,|_{\widehat{\Phi}}=0,\ \ \hbar\to 1/N, \tag{3.3}$$

където $\langle\Phi(x_1)\ldots\Phi(x_r)\rangle=(-i)^r\delta^r \ln Z[j_\Phi]\,|\,\delta j_\Phi(x_1)\ldots\delta j_\Phi(x_r)\,|_{j_\Phi=0}$

са свързаните функции на Грин. Следователно съгласно (3.3) всеки тип стационарно решение $\widehat{\Phi}$ определя (в квазикласическо приближение) съответна фаза на системата, т. е. съответна структура на вакуума.

Нека скицираме прилагането на описаната обща процедура на $1/N$-разлагането към КНЛСМ+Ф (2.2).

Първата стъпка е да се преобразува (2.2) в нова еквивалентна форма като квадратична функция по φ_a^k, ψ_a^k с помощта на спомагателни $\mathrm{U}(N)$-синглетни полета (α_0, $\underset{\sim}{\alpha}$, σ_0, $\underset{\sim}{\sigma}$ — реални скаларни, ρ_0, $\underset{\sim}{\rho}$ — комплексни фермиони)

(3.4) $L'_{\text{КНЛСМ}+\Phi} = |\nabla_\nu \varphi|^2 - \varphi^*(\alpha_0 + \underset{\sim}{\alpha})\varphi + (Nn\mu/T)\alpha_0 - (Nn\mu/\lambda_0)\sigma_0^2$

$$-(N\mu/\lambda_1)\,\mathrm{tr}\,(\sigma^2) + i\bar{\psi}\nabla^{(\varepsilon)}\psi + \bar{\psi}(\sigma_0+\sigma)\psi + \bar{\psi}(\rho_0+\underset{\sim}{\rho})\varphi + \varphi^*(\bar{\rho}_0 + \bar{\underset{\sim}{\rho}})\psi + NnL_{A,W}.$$

Втората стъпка е разделянето на полетата φ_a^k на две части:

$$\varphi = N^{1/2}\varphi_{||} + \varphi_\perp, \ (\varphi_\perp)_a^k (j_\varphi^*)_a^k = (j_\varphi)_a^k (\varphi_\perp^*)_a^k = 0, \tag{3.5}$$

където j_φ е източникът на φ. Без ограничение на общността можем да фиксираме N— компонентните вектори $j_\varphi^{(k)} \equiv ((j_\varphi)_a^k)_{a=1,\ldots,N} \in \mathbf{C}^N$, $k=1,\ldots,n$, във вида $(j_\varphi)_a^k = 0$, $a=n+1,\ldots,N$. Следователно $(\varphi_\perp)_a^k = 0$, $a=1,\ldots,n$ $(\varphi_{||})_a^k = 0$, $a=n+1,\ldots,N$. Съображенията за разделянето (3.5) са: ненулева вакуумна средна стойност в случая на квантовата теория може да придобие само частта $\varphi_{||}$ [15]; $\varphi_{||}$ има само n ненулеви компоненти, т. е. броят им не зависи от N. Третата стъпка е явното извършване на интегрирането по ψ, $\varphi_\perp$ (съответният континуален интеграл е гаусов) в (3.1), където $L(\Phi)$ е (3.4)

$$Z[j_\varphi] = \int \mathfrak{D}\varphi_\perp \mathfrak{D}\psi \mathfrak{D}\varphi_{||} \mathfrak{D}\alpha_0 \ldots \mathfrak{D}\chi \exp\{i \int d^3x\, [L'_{\text{КНЛСМ}+\Phi}(x) + \sum_{\Phi=\varphi,\psi,\ldots} j_\Phi(x)\Phi(x)]\}$$

$$= \int \mathfrak{D}\varphi_{||} \mathfrak{D}\alpha_0 \ldots \mathfrak{D}\chi \exp\{iNS_1[\varphi_{||}, \alpha_0, \sigma_0] + iS_2[j_\Phi]\},$$

$$S_1[\varphi_{||}, \alpha_0, \sigma_0, \ldots] = i(1-n/N)\,\mathrm{Tr}\ln\Delta_B - i\,\mathrm{Tr}\ln\Delta_F + \int d^3x\,[-\varphi_{||}^*\Delta_B\varphi_{||} \tag{3.6}$$

$$+ (n\mu/T)\alpha_0 - (n\mu/\lambda_0)\sigma_0^2 - (\mu/\lambda_1)\,\mathrm{tr}\,(\sigma^2) + nL_{A,W}],$$

$$\Delta_F \equiv i\nabla^{(\varepsilon)} + \sigma_0 + \sigma, \ \Delta_B \equiv \nabla_\mu\nabla^\mu + \alpha_0 + \alpha + (\bar{\rho}_0 + \bar{\underset{\sim}{\rho}})\Delta_F^{-1}(\rho_0 + \underset{\sim}{\rho}),$$

а $S_2[j_\Phi]$ съдържа членовете с източниците на Φ.

От (3.3), като отчитаме инвариантността на вакуума относно групата на Лоренц, получаваме $\widehat{\Phi}=0$ и $\Phi=\psi$, A_μ, $\underset{\sim}{W}_\mu$, ρ_0, $\underset{\sim}{\rho}$, $\underset{\sim}{\chi}$. Също така непосредствено може да се провери от уравненията за стационарност, че $\widehat{\Phi}=0$ и $\Phi=\underset{\sim}{\alpha}$, $\underset{\sim}{\sigma}$. Тогава за оставащите полета

$$(\widehat{\varphi_{||}})_a^k \equiv v_a^k\,(v^{*k}_a v^l_a = |v|^2\delta^{kl};\ v_a^k = 0,\ a = n+1,\ldots,N),\ \widehat{\alpha_0} \equiv m_\varphi^2,\ \widehat{\sigma_0} \equiv -m_\psi,$$

уравненията за стационарност на S_1 (3.6) имат вида

$$n^{-1}\delta S_1/\delta\alpha_0 = \frac{1}{4\pi}m_\varphi - [|v|^2 + \mu(1/T_c - 1/T)] = 0,\ \delta S_1/\delta(\varphi_{||}^*)_a^k = -m_\varphi^2 v_a^k = 0,$$

$$n^{-1}\delta S_1/\delta\sigma_0 = -\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{sign}\,(m_\psi)\,m_\psi^2 + 2\mu(1/T_c - 1/\lambda_0)\,|m_\psi| = 0. \tag{3.7}$$

Тук константата T_c възниква при пресмятането на пренормирания израз

$$i\,\frac{\delta\,\mathrm{Tr}\ln\Delta_B}{\delta\alpha_0}\Big|^{\text{ren}}_{\widehat{A}_\mu=\ldots=\widehat{\underset{\sim}{\alpha}}=0} = \Big\{i\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,[m_\varphi^2 - p^2]^{-1}\Big\}^{\text{ren}} = \frac{1}{4\pi}\,m_\varphi - \mu/T_c,$$

$T_c = 4\pi(1+a_0)$, където a_0 е произволна безразмерна константа, отчитаща свободата при пренормировката.

Означенията за $\widehat{\alpha}_0$, $\widehat{\sigma}_0$ не са случайни. Именно от (3.6) се вижда, че (във фазите, където $\widehat{\alpha}_0$, $\widehat{\sigma}_0 \neq 0$) $\widehat{\alpha}_0^{1/2}$, $-\widehat{\sigma}_0$ имат действително смисъл на динамично генерирани маси за съответните безмасови в изходната класическа теория (2.1) полета φ и ψ.

Решенията на (3.7) имат вида

$$v=0,\ m_\varphi=4\pi\mu\,(1/T_c-1/T)\ \text{при}\ T>T_c,\ m_\psi=0\ \text{при}\ 0<\lambda_0<T_c;$$

$$(3.8)\qquad |v|^2=\mu\,(1/T-1/T_c),\ m_\varphi=0\ \text{при}\ T<T_c;$$

$$|m_\psi|=4\pi\mu\,(1/T_c-1/\lambda_0)\ \text{при}\ \lambda_0<0,\ \lambda_0>T_c.$$

Аналогично (3.3) в този случай се превръща в

$$(3.9)\qquad \langle\varphi\,(x)\rangle=N^{1/2}\,[v+\mathrm{O}\,(N^{-1})],\ \langle(\bar{\psi}\,\psi)\,(x)\rangle=\frac{2Nn\mu}{\lambda_0}\,\langle\sigma_0(x)\rangle=N\left[-\left(\frac{2n\mu}{\lambda_0}\right)\right.$$
$$\left. m_\psi+\mathrm{O}\,(N^{-1})\right].$$

Следователно въпросът, кое от решенията (3.8) има физичен смисъл, се решава от свойствата на стабилност на квантовия ефективен потенциал [23] $\mathcal{U}\,(\langle\varphi\rangle,\ \langle\bar{\psi}\,\psi\rangle)$ на модела (2.2). Тук ще приведем направо резултатите. Изразът за $\mathcal{U}$ е

$$(3.10)\qquad \mathcal{U}\,(\langle\varphi\rangle,\ \langle\bar{\psi}\,\psi\rangle)=\mathcal{U}_1(\langle\varphi\rangle,\ \langle\sigma_0\rangle)-\frac{\lambda_0}{4Nn\mu}\left(\frac{\delta\mathcal{U}_1}{\delta\langle\sigma_0\rangle}\right)^2,$$

където $\mathcal{U}_1(\langle\varphi\rangle,\ \langle\sigma_0\rangle)$ е съответният ефективен потенциал за модела (3.4). От (3.10), като отчитаме (3.9), получаваме

$$(3.11)\qquad \frac{\delta^2\mathcal{U}}{(\delta\langle\bar{\psi}\,\psi\rangle)^2}=\left(\frac{\lambda_0}{2Nn\mu}\right)^2\,\frac{\delta^2\mathcal{U}_1}{(\delta\,\langle\sigma_0\rangle)^2}\left[1-\frac{\lambda_0}{2Nn\mu}\,\frac{\delta^2\mathcal{U}_1}{(\delta\langle\sigma_0\rangle)^2}\right]^{-1}.$$

В главното приближение по $1/N$ е в сила

$$(3.12)\qquad n^{-1}\mathcal{U}_1^{(N\to\infty)}=\frac{1}{6\pi}\,|\langle\sigma_0\rangle|^3-\mu\langle\sigma_0\rangle^2(1/T_c-1/\lambda_0)+\langle\alpha_0\rangle\,[\,|\,v\,|^2+\mu\,(1/T_c-1/T)]$$
$$-\frac{1}{6\pi}\,\langle\,\alpha_0\,\rangle^{3/2},$$

а след заместване на (3.12) в (3.11) получаваме

$$(3.13)\qquad \frac{\delta^2\mathcal{U}^{(N\to\infty)}}{(\delta\,\langle\bar{\psi}\,\psi\rangle)^2}>0\ (\text{стабилност}),\ \text{само при}\ \lambda_0<2T_c.$$

И така, проведеният тук анализ ни води до заключението, че в случая на квантовата теория (поне в границата на големи N) КНЛСМ+Ф (2.2) стават нестабилни при $\lambda_0>2T_c$ (ефективният потенциал не притежава абсолютен минимум, който би трябвало да съответствува на енергията на вакуума (вж. (3.13)).

Структурата на фазите и спектрите на частиците във всяка от тях ще бъдат описани по-нататък. Информация за спектрите се съдържа в „свободните" пропагатори на полетата $\langle\Phi\,(x)\Phi^{(*)}\,(\,y)\rangle^{(0)}$, $\Phi=\varphi,\ \psi,\ldots,\ A_\mu,\ \widetilde{W}_\mu$, в $1/N$-диаграмната техника (3.15), (3.17). Пропагаторите се определят от квадратичния член в разлагането на $S_1\,[\Phi]$ (3.6) около $\widehat{\Phi}$:

$$(3.14)\qquad (\langle\Phi\Phi^{(*)}\rangle^{(0)})^{-1}\,(x,\ y)=iN\,\delta^2S_1\,[\Phi]\,/\,\delta\Phi^{(*)}\,(x)\,\delta\Phi\,(\,y)\,|_{\widehat{\Phi}},$$

а по-висшите членове в това разлагане дават върховете на $1/N$-Файнмановите диаграми.

Тук ще приведем направо явния вид на $1/N$-пропагаторите в импулсно пространство в единен запис, едновременно валиден за всички фази на КНЛСМ+Ф, отговарящи на различните стационарни точки (3.8) (вж. 4.1) и I—IV в следващите разглеждания. За основните полета φ, ψ, A_μ, $\underset{\sim}{W}_\mu$ получаваме.

$$(3.15а)\quad \langle\varphi_a^k\varphi^{*l}_b\rangle^{(0)}(p)=(-i)\,\delta_{ab}\delta^{kl}[m_\varphi^2-p^2]^{-1}+n^{-1}(-p^2)^{-2}\{v_a^k v^{*l}_b Nn\langle\alpha_0\alpha_0\rangle^{(0)}(p)$$

$$+(\tau_A v_a)^k(v_a^*\tau_B)^l Nn\langle\alpha_A\alpha_B\rangle^{(0)}(p)\},$$

$$(3.15б)\quad \langle\psi_a^k\overline{\psi}_b^l\rangle^{(0)}(p)=(-i)\,\delta_{ab}\delta^{kl}(p+m_\psi)[m_\psi^2-p^2]^{-1}$$

$$+n^{-1}(-p^2)^{-1}\{v_a^k v_b^{*l}Nn\langle\rho_0\overline{\rho}_0\rangle^{(0)}(p)+(\tau_A v_a)^k(v_a^*\tau_B)^l Nn\langle\rho_A\overline{\rho}_B\rangle^{(0)}(p)\},$$

$$(3.15в)\quad \langle A_\mu A_\nu\rangle^{(0)}(p;\,e_0,\,\varepsilon_0)=(Nn)^{-1}i\,[\mathscr{F}^2(p;\,e_0,\,\varepsilon_0)-p^2\varepsilon_0^4\mathscr{G}^2(p)]^{-1}$$

$$\times\{(\eta_{\mu\nu}-p_\mu p_\nu/p^2)\mathscr{F}(p;\,e_0,\,\varepsilon_0)+i\varepsilon_0^2\varepsilon_{\mu\nu\lambda}p^\lambda\mathscr{G}(p)\},$$

$$(3.15г)\quad \langle W_A^\mu W_B^\nu\rangle^{(0)}(p;\,e_1,\,\varepsilon_1)=\delta_{AB}\langle A^\mu A^\nu\rangle^{(0)}(p;\,e_1,\,\varepsilon_1),$$

където са въведени означенията

$$\mathscr{F}(p;\,e,\,\varepsilon)\equiv-p^2/e^2\mu+|v|^2+(4m_\varphi^2-p^2)1/2\,F(p^2;\,m_\varphi)-\frac{1}{4\pi}m_\varphi$$

$$+\varepsilon^2\left[\frac{1}{4\pi}|m_\psi|-(4m_\psi^2+p^2)\,1/2\,F(p^2;\,m_\psi)\right],$$

$$(3.16)\quad \mathscr{G}(p)\equiv 2m_\psi F(p^2;\,m_\psi)=\frac{1}{4\pi}\operatorname{sign}(m_\psi)\,f(p^2/4m_\psi^2),$$

$$f(z)=\begin{cases}(-z)^{-1/2}\operatorname{arctg}[(-z)^{1/2}], & z<0\\ 1/2\,z^{-1/2}\ln[(1+z^{1/2})(1-z^{1/2})^{-1}], & z>0.\end{cases}$$

За спомагателните полета прапагаторите са

$$(3.17а)\quad \langle\rho_0\overline{\rho}_0\rangle^{(0)}(p)=2i(Nn)^{-1}[(p+2m_\psi)F(p^2;\,\tfrac{1}{2}(m_\varphi+m_\psi))$$

$$+2i|v|^2(m_\psi-p)^{-1}]^{-1},\ \langle\alpha_0\alpha_0\rangle^{(0)}(p)=i(Nn)^{-1}F(p^2;\,m_\varphi)-2|v|^2/p^2]^{-1},$$

$$(3.17б)\quad \langle\sigma_0\sigma_0\rangle^{(0)}(p)=-i(Nn)^{-1}[(4m_\psi^2-p^2)F(p^2;\,m_\psi)+2\mu(1/\lambda_0-1/T_c)$$

$$\times\theta(\lambda_0)\,\theta(T_c-\lambda_0)]^{-1},$$

$$\langle\rho_A\rho_B\rangle^{(0)}(\overline{p})=\delta_{AB}\langle\rho_0\overline{\rho}_0\rangle^{(0)}(p),\ \langle\alpha_A\alpha_B\rangle^{(0)}(p)=\delta_{AB}\langle\alpha_0\alpha_0\rangle^{(0)}(p),$$

$$(3.17в)\quad \langle\sigma_A\sigma_B\rangle^{(0)}(p)=-i(Nn)^{-1}[(4m_\psi^2-p^2)F(p^2;\,m_\psi)+2\mu(1/\lambda_1-1/\lambda_0)$$

$$+2\mu(1/\lambda_0-1/T_c)\,\theta(\lambda_0)\,\theta(T_c-\lambda_0)]^{-1}.$$

4. ФАЗОВА КАРТИНА И СПЕКТЪР НА ЧАСТИЦИТЕ

Съгласно (3.3), (3.7) и (3.9) фазите се определят от два параметъра на подреждане: $\langle\varphi\rangle$ и $\langle(\overline{\psi}\psi)\rangle$. Решенията (3.8) заедно с анализа на ефективния потенциал относно условията за стабилност (3.10)–(3.13) дават следните фази за КНЛСМ+Ф (2.2):

I. P- и T-симетрична „високотемпературна" фаза при $T>T_c$, $0<\lambda_0<T_c$:

$$(4.1а)\quad v=0,\ m_\varphi=4\pi\mu(1/T_c-1/T),\ m_\psi=0.$$

II. „Високотемпературна“ фаза със спонтанно нарушение на P- и T-симетриите вследствие на динамичното раждане на $m_\psi \neq 0$ (срв. (3.9) и (2.3), при $T > T_c$, $\lambda_0 < 0$ или $T_c < \lambda_0 < 2T_c$)

(4.1б) $$v=0, m_\varphi = 4\pi\mu(1/T_c - 1/T), \ |m_\psi| = 4\pi\mu(1/T_c - 1/\lambda_0).$$

III. P- и T-симетрична „нискотемпературна“ фаза със спонтанно нарушение на вътрешната симетрия (2.1) до остатъчната симетрия $U(N-n)$ („ароматна“)$\times$diag$(U(n)$(„ароматна“)$\times U(n)$ („цветна“ глобална)) (последната е група на стабилност на вакуума $\langle \varphi_a^k = N^{1/2}(v_a^k + O(N^{-1}))\rangle$ при $T \wedge T_c$, $0 < \lambda_0 < T_c$:

(4.1в) $$|v|^2 = \mu(1/T - 1/T_c), \ m_\varphi = 0, \ m_\psi = 0.$$

IV. „Нискотемпературна“ фаза със спонтанно нарушение както на P- и T-симетриите (същото както в II), така и на вътрешната симетрия (2.1) (същото както в III) при $T < T_c$, $\lambda_0 < 0$ или $T_c < \lambda_0 < 2T_c$

(4.1г) $$|v|^2 = \mu(1/T - 1/T_c), m_\varphi = 0, |m_\psi| = 4\pi\mu(1/T_c - 1/\lambda_0).$$

Тъй като двата параметъра на подреждане (3.9) са непрекъснати функции на T и λ_0 върху линиите $T = T_c$ и $\lambda_0 = T_c$ в (T, λ_0)-плоскостта, то съответните фазови преходи между всеки две от фазите I—IV са от втори род. Линията $\lambda_0 = 0$ отговаря на фазови преходи от първи род между I и II при $T > T_c$ и съответно между III и IV при $T < T_c$, тъй като $\langle(\bar\psi\psi)\rangle$ търпи (безкраен) скок там (срв. 3.9) и (4.1 б, г)).

Спектърът на частиците непосредствено се разчита от аналитичните свойства (полюсите по p^2) на $1/N$-пропагаторите (3.15), (3.17). Най-богат е спектърът във фаза II. Той се състои от nN двойки от бозони φ_a^k и фермиони ψ_a^k с динамично генерирани маси (4.1б) и от следния набор съставни частици.

IIа. Масивни калибровъчни бозони A^ν, W^ν в следните области на параметрите ($r \equiv m_\varphi / |m_\psi|$; $f(.)$ е дефинирана в $(\tilde{3}.16)$)

$$r > 1, \ e_{0,1}^2 < 16\pi |m_\psi| \{\mu[\varepsilon_{0,1}^2 - r + r(1-r^{-2}) f(r^{-2})]\}^{-1}$$

$$\text{или } r < 1, \ e_{0,1}^2 < 16\pi |m_\psi| r^2 \{\mu[\varepsilon_{0,1}^2 - r - \varepsilon_{0,1}^2 (1-r)^2 f(r^2)]\}^{-1}.$$

Съответните маси $m_{A,W}$ се определят като ненулеви решения на трансцедентните уравнения

$$2\varepsilon_{0,1}^2 \sqrt{x_{A,W}} f(x_{A,W}) = \varepsilon_{0,1}^2 (1 + x_{A,W}) f(x_{A,W}) + 16\pi) |m_\psi| (\mu e_{0,1}^2)^{-1} x_{A,W}$$
$$-\varepsilon_{0,1}^2 + r - r(1 - x_{A,W}/r^2) f(x_{A,W}/r^2),$$
$$x_{A,W} \equiv m_{A,W}^2 / 4m_\psi^2, \ m_{A,W} < \min\{2|m_\psi|, 2m_\varphi\}.$$

IIб. Масивни съставни фермиони ρ_0, $\underset{\sim}{\rho}$ в режима $m_\varphi > |m_\psi|$ с маси $m_\rho = 2|m_\psi|$ (ср. (3.17а)) като свързани състояния на φ- и ψ-квантите. Действително на класическо ниво

$$\rho_0 = -T(Nn\mu)^{-1}(\varphi^* i \,\widehat{\nabla}^{(\varepsilon)} \psi), \ \rho_A = -T(Nn\mu)^{-1}(\varphi^* \tau_A i \,\widehat{\nabla}^{(\varepsilon)} \psi).$$

IIв. Масивни съставни „цветни“ скалари $\underset{\sim}{\sigma}$ (на класическо ниво $\sigma_A = \lambda_1(2Nn\mu)^{-1}(\bar\psi \tau_A \psi)$ / в режима $|m_\psi|(4\pi\mu < 1/T_c - 1/\lambda_1 < |m_\psi|) 2\pi\mu$, чиято маса се получава като решение на трансцедентното уравнение (срв. (3.17в))

$$(1-x_\sigma)f(x_\sigma)+1+\frac{4\pi\mu}{|m_\psi|}\,(1/\lambda_1-1/T_c)=0,\ 0\le x_\sigma = m_\sigma^2/4m_\psi^2<1.$$

От друга страна, полюсът в (3.17б) при $p^2=4m_\psi^2$ не съответствува на реална частица, тъй като в тази точка $F(p^0;\ m_\psi)$ от (3.16) има логаритмична точка на разклонение.

Масивността на A^ν, W^ν във фаза II се дължи на P- и T-нарушаващите членове в (3.15в, г)

$$(4.2)\qquad -(Nn)^{-1}\,\varepsilon_{\mu\nu\lambda}\,p^\lambda\,\frac{1}{4\pi}\,\varepsilon_{0,1}^2\,f(p^2/4m_\psi^2)\,[\mathscr{F}^2(p;\ e_{0,1},\ \varepsilon_{0,1})-p^2\,\varepsilon_{0,1}^4\,\mathscr{C}^2(p)]^{-1},$$

възникнали в резултат на динамично генерираната $m_\psi\neq 0$. Присъствието на (4.2) съгласно (3.14) е еквивалентно на присъствието на калибровъчно инвариантни масови членове за A^ν, $\underset{\sim}{W}^\nu$ и

$$(4.3)\qquad \frac{Nn}{16\pi}\,\varepsilon\int d^3x\left\{A_\mu F_{\nu\lambda}(A)+\frac{1}{n}\,\mathrm{tr}\left[\underset{\sim}{W}_\mu \underset{\sim}{G}_{\nu\lambda}(W)-\frac{2i}{3}\,\underset{\sim}{W}_\mu \underset{\sim}{W}_\nu \underset{\sim}{W}_\lambda\right]\right\}$$

в S_1 от (3.6) (в нискоенергетичната граница $|p|^2\ll m_{\varphi\psi}^2$).

Да отбележим, че получената стойност на константата $Nn/16\pi$ се съгласува с условието за нейното квантуване [35], което от своя страна е следствие от съвършено независими причини (от нетривиалната топология на неабелевата калибровъчна група).

Калибровъчните бозони A^ν, $\underset{\sim}{W}^\nu$ изчезват от спектъра (биват „удържани" в останалите фази I, III и IV поради появата на сингулярност от вида $\sqrt{-p^2}$ в (3.15в, г) ($F(p^2,\ 0)=(8\sqrt{-p^2})^{-1}$ в (3.16)). Тук е важно да се отбележи, че в КНЛСМ+Ф в (2.2) не възникват нито безмасови калибровъчни бозони във фазите I и II въпреки наличната калибровъчна симетрия, нито масивни калибровъчни бозони по механизма на Хигс [36] във фазите III и IV, където калибровъчната симетрия $U(n)$ е напълно спонтанно нарушена.

Във фаза I има nN масивни бозони φ_a^k, nN безмасови елементарни фермиони ψ_a^k и n^2 съставни безмасови фермиони ρ_0, $\underset{\sim}{\rho}$ (срв. (3.17, а) при $m_\psi=0$, $m_\varphi\neq 0$).

Във фаза III спектърът се състои само от $n(N-1)$ безмасови Голдстоунови бозони $(\varphi_\perp)_a^k$, $v_a^{*l}\varphi_a^k\,(k\neq l)$, съответствуващи на спонтанното нарушение на вътрешната симетрия (2.1), и от $n(N-1)$ безмасови фермиони $(\psi_\perp)_a^k$, $v_a^{*l}\psi_a^k\,(k\neq l)$ $(\psi=\psi_\perp+\psi_{||}$ се дефинира аналогично на (3.5)). Тук не само съставните частици, но и част от елементарните полета $v_a^{*l}\varphi_a^l$ и $v_a^{*l}\psi_a^l$ без A^ν, $\underset{\sim}{W}^\nu$ (няма сумиране по l) са „удържани" вследствие на поява на сингулярност $\sqrt{-p^2}$ в (3.15а, б).

Във фаза IV освен същите Голдстоунови бозони, както във фаза III, има $n(N-1)$ масивни елементарни фермиони $(\psi_\perp)_a^k$, $v_a^{*l}\psi_a^k\,(k\neq l)$ и n безмасови елементарни фермиони $v_a^{*l}\psi_a^l$ (няма сумиране по l) и същите масивни съставни „цветни" скалари както в II в. Елементарните скалари $v_a^{*l}\varphi_a^l$ (няма сумиране по l) продължават да бъдат „удържани".

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Ще резюмираме съвкупността от интересните свойства от физична гледна точка на КНЛСМ+Ф в (2.2) при $D=3$, получени с помощта на $1/N$-разлагането.

1. Наличие на няколко фази, определени от два параметъра на подреждане и свързани със спонтанно нарушение (и възстановяване) както на вътрешната симетрия (2.1), така и на дискретните пространствено-временни Р- и Т-отражения (2.3), които при $D=3$ играят роля, аналогична на ролята на киралните симетрии при $D=4$.

2. Динамично генериране на маси за класически безмасовите основни полета.

3. Поява на нов механизъм, отличен от механизма на Хигс, за динамично генериране на калибровъчно инвариантни маси на калибровъчните бозони; при това механизмът на Хигс тук не е в сила.

4. Нетривиален и качествено различен в отделните фази спектър на частиците, включващ както съставни фермиони и бозони, така и „удържане" на квантите на част от основните полета.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ellis, J. — In: Gauge Theories in High Energy Physics. Amsterdam, North Holland, 1983.
2. Вильсон, К., Дж. Когут. Ренормализационная группа и ε-разложение. М., Мир, 1975.
3. 't Hooft, G. — In: Fundamental Interactions. New York, Plenum Press, 1983.
4. Coleman, S. — In: New Phenomena in Subnuclear Physics. New York, Plenum Press, 1977.
5. Coleman, S. The Unity of the Fundamental Interactions. New York, Plenum Press, 1983.
6. Rajaraman, R. Solitons and Instanton. Boston, Benjamin, 1982.
7. Боголюбов, Н. Н., Д. В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей. М., Наука, 1980.
8. Ициксон, К., Ж.—Б. Зюбер. Квантовая теория поля. М., Мир, 1984.
9. Fadeev, L. D., V. E. Korepin. — Phys. Reports, 42, 1978, p. 1.
10. Drouffe, J.—M., J.—B. Zuber — Phys. Reports, 102, 1983, p. 1.
11. Coleman, S. — In: Pointlike Structures Inside and Outside Hadrons. New York, Plenum Press, 1981.
12. Migdal, A. A. — Phys. Reports, 102, 1983, p. 199.
13. Макеенко, Ю. М.—Успехи физ. наук., 143, 1984, с. 161.
14. Kogut, J. — In: Recent Advances in Field Theory and Statistical Mechanics, Amsterdam, North Holland, 1984.
15. Brezin, E., J. Le Guillou, J. Zinn-Justin. — Phase Transitions and Critical Phenomena, 6, New York, Academic Press, 1976.
16. Gross, D., R. Pisarski, L. Yaffe. — Rev. Mod. Phys., 53, 1981, p. 43.
17. Tomboulis, E. — Phys. Lett., 70 B, 1977, p. 361.
18. Tomboulis, E. — Phys. Lett., 97 B, 1980, p. 77.
19. Nissimov, E. R., S. J. Pacheva. — Lett. Math. Phys., 5, 1981, p. 67.
20. Nissimov, E. R., S. J. Pacheva. — Lett. Math. Phys., 8, 1982, p. 361.
21. Нисимов, Е. Р., С. И. Пачева. — В: Сб. Кварки — 82. М., АН СССР, 1983.
22. Nissimov, E. R., S. J. Pacheva. — Phys. Lett., 1458, 1984.
23. Славнов, А. А., Л. Д. Фаддеев. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М., Наука, 1978.
24. Глимм, Дж., А. Джаффе. Математические методы квантовой физики. Подход с использованием функциональных интегралов. М., Мир, 1984.
25. Peskin, M. E. — In: Recent Advances in Field Theory and Statistical Mechanics. Amsterdam, North Holand, 1984.
26. Wess, J., J. Bagger. Supersymmetry and Supergravity. Princeton, Princeton Univ. Press, 1983.
27. James Gates, S., M. Grisaru, M. Rocek, W. Siegel. Superspace or One Thousand and One Lessons in Supersymmetry. Boston, Benjamin, 1983.
28. Alvarez-Gaumé, L., D. Freedman. — Comm. Math. Phys., 80, 1981, p. 443.
29. Witten, E. — Nucl. Phys., B149, 1979, p. 285.
30. d'Adda, A., P. di Vecchia, M. Lüscher. — Nucl. Phys., B152, 1979, p. 125.
31. Redlich, A. N. — Phys. Rev. D29, 1984, p. 2366.
32. Alvarez-Gaumé, L., E. Witten. — Nucl. Phys., B234, 1984, p. 269.
33. Васильев, А. Н. Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике. Л., ЛГУ, 1976.